Лекция 12

Екі өлшемді үзіліссіз кездейсоқ шама. Бірлескен үлестірім функциясы, тығыздығы, қасиеттері. Маргиналды үлестірімдер.

Кездейсоқ шамалардың қосындысының үлестірімі. $\xi_1, \dots, \xi_n$ -үзіліссіз кездейсоқ шамалар, $f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1 \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ – олардың бірлескен үлестірім тығыздығы болсын. $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын және үлестірім тығыздығын табалық.

Анықтама бойынша және (15)-формула негізінде былай жаза аламыз:

$$F_\eta(x) = P\{\eta \le x\} = P\{\xi_1 + \dots + \xi_n \le x\} = \int\limits_{x_1+\dots+x_n \le x} \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n .$$

$n = 2$ жағдайын жеке қарастыралық. Бұл жағдайда

$$F_\eta(x) = F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \iint\limits_{x_1+x_2 \le x} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-x_2} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 .$$

(жоғарыдағы екі еселі интегралдарды қайталама интегралдар арқылы жазуға болатындығы заңды – ол үшін анализден белгілі қажетті шарттар орындалады).

Жаңа айнымалыларды енгізіп, бұл интегралдарды енді былайша түрлендіре аламыз:

$$F_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2 - x_1) dx_1 \right] dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{x} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 - x_2, x_2) dx_2 \right] dx_1 .$$

Соңғы формулалар, егер (ξ_1, ξ_2) бірлескен үлестірім тығыздығы бар (абсолютті үзіліссіз) кездейсоқ шама болса, онда олардың қосындысы да тығыздығы бар (яғни абсолютті үзіліссіз) кездейсоқ шама болатынын және ол тығыздық

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x - x_1) dx_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_2, x_2) dx_2 \qquad (17')$$

формулаларымен анықталатынын көрсетеді.

Егер қосымша ξ_1, ξ_2 тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, ал $f_{\xi_1}(x_1)$, $f_{\xi_2}(x_2)$ – олардың үлестірім тығыздықтары болса, онда қосындының үлестірім тығыздығы

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(x_2) f_{\xi_1}(x - x_2) dx_2 \qquad (17)$$

формуласымен анықталады. Осы соңғы (17)-формула *композиция формуласы* немесе *үйірткі* формуласы деп аталады. Композиция формуласын көбіне қысқаша $f_{\xi_1} * f_{\xi_2}(x)$ түрінде жазады ($*$ – үйірткі операциясы).

Сонымен $f_{\xi_1}(x)$ және $f_{\xi_2}(x)$ тығыздықтарының композициясы (үйірткісі)

$$f_{\xi_1} * f_{\xi_2}(x) = f_{\xi_1+\xi_2}(x) \qquad (18)$$

(17)-формулалармен анықталады.

Егер ξ_1, ξ_2, ξ_3 тәуелсіз кездейсоқ шамаларын қарастырсақ, онда $\xi_1 + \xi_2$ және ξ_3 кездейсоқ шамалары тәуелсіз кездейсоқ шамалар болғандықтан

$$f_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = f_{\xi_1+\xi_2} * f_{\xi_3}(x) = f_{\xi_1} * f_{\xi_2} * f_{\xi_3}(x),$$

сол сияқты тәуелсіз $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ үшін

$$f_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(x) = f_{\xi_1} * f_{\xi_2} * \ldots * f_{\xi_n}(x). \qquad (18')$$

Егер қосымша барлық $\xi_1, \ldots, \xi_n$ бірдей үлестірілген және $f_{\xi_i}(x) = f(x)$ болса, онда

$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(x) = f * f * \ldots * f(x) = f^{n*}(x). \qquad (18'')$$

($f^{n*}(x)$ жазуы $f(x)$ функциясына үйірткі операциясы n рет қолданылғанын білдіреді)

Дискретті кездейсоқ шамалар үшін *композиция формуласы* І-бөлімде қарастырылған болатын ([9], ІІІ-тарау, §1). Сондықтан да біз қазір бұл ұғымды тек *бүтін мәнді*, яғни тек теріс емес бүтін мәндер ғана қабылдайтын тәуелсіз кездейсоқ шамалар үшін ғана қысқаша қайта қарастырамыз.

Айталық, ξ_1 және ξ_2 –бүтін мәнді тәуелсіз кездейсоқ шамалар болсын. Онда

$$\{\omega : \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\omega : \xi_1(\omega) = k, \xi_2(\omega) = n - k\}$$

болғандықтан

$$P\{\xi_1+\xi_2=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{\xi_1=k\}\cdot P\{\xi_2=n-k\}.$$

Егер $a_k=P\{\xi_1=k\}$, $b_m=P\{\xi_2=m\}$, $c_n=P\{\xi_1+\xi_2=n\}$ белгілеулерін енгізсек, онда

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=a_0b_n+a_1b_{n-1}+...+a_{n-1}b_1+a_nb_0. \qquad (19)$$

(19)-формуламен анықталған $\{c_n\}$ тізбегі $\{a_n\}$ *және* $\{b_n\}$ *тізбектерінің композициясы немесе үйірткісі* деп аталады және ол қысқаша

$$\{c_n\}=\{a_n\}*\{b_n\} \qquad (19')$$

арқылы белгіленеді.

6-ескерту. (19) қатынастағы $\{a_k\}$, $\{b_m\}$ тізбектері $a_k\geq 0$, $b_m\geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\sum_{m=0}^{\infty}b_m=1$ шарттарын қанағаттандыратын тізбектер (ықтималдықтық үлестірімдер). Ал жалпы тізбектердің композициясы ұғымы кез келген (міндетті түрде ықтималдықтық үлестірім болмайтын) $\{a_k\}$, $\{b_m\}$ тізбектері үшін де (19)-қатынаспен анықталады.

Мәселен, егер $a_k=b_k=1$, $k\geq 0$, болса, онда $c_k=k+1$. Егер $a_k=k$, $b_k=1$ болса, онда $c_k=1+2+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Егер $a_0=a_1=\dfrac{1}{2}$, ал $k\geq 2$ үшін $a_k=0$ болса, онда $c_k=\dfrac{b_k+b_{k-1}}{2}$ т.с.с.

7-ескерту. Егер ξ_1 – абсолютті үзіліссіз, ал ξ_2 – дискретті кездейсоқ шама және олар тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда $\{\xi_1+\xi_2\leq x\}=\bigcup_j\{\xi_1+\xi_2\leq x,\xi_2=y_j\}=\bigcup_j\{\xi_1\leq x-y_j,\xi_2=y_j\}$ болғандықтан

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\sum_j P\{\xi_1\leq x-y_j,\xi_2=y_j\}=\sum_j P\{\xi_2=y_j\}\cdot F_{\xi_1}(x-y_j),$$

$$F'_{\xi_1+\xi_2}(x)=f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\sum_j P\{\xi_2=y_j\}f_{\xi_1}(x-y_j).$$

Сонымен *үзіліссіз және дискретті тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындысы үзіліссіз кездейсоқ шама* болады.

Мәселен, егер ξ_1 – $[0,1]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шама, ал ξ_2 шамасы 0, ± 1, ± 2, … мәндерін сәйкес $P\{\xi = -k\} = p_{-k}$, $P\{\xi = k\} = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ықтималдықтарымен қабылдайтын кездейсоқ шамалар болса, онда $k \le x < k+1$ үшін $f_{\xi_1+\xi_2}(x) = p_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Қатынастың үлестірім тығыздығы. (ξ_1, ξ_2) кездейсоқ шамасының бірлескен үлестірім тығыздығы $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$, ал компоненталарының үлестірім тығыздықтары $f_{\xi_1}(x_1)$, $f_{\xi_2}(x_2)$ болсын. Онда, анықтама бойынша (біз $P\{\xi_2 \ne 0\} = 1$ деп ұйғарамыз)

$$F_{\xi_1/\xi_2}(x) = P\left\{\frac{\xi_1}{\xi_2} \le x\right\} = \iint\limits_{\frac{x_1}{x_2} \le x} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{xx_2} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{xx_2}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 .$$

Бұдан $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ қатынасының үлестірім тығыздығы

$$f_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int\limits_0^{\infty} x_2 f_{\xi_1,\xi_2}(xx_2, x_2)dx_2 - \int\limits_{-\infty}^{0} x_2 f_{\xi_1,\xi_2}(xx_2, x_2)dx_2 ,$$

немесе

$$f_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{\xi_1,\xi_2}(xx_2, x_2)dx_2 \qquad (20)$$

болатынын аламыз. Егер де ξ_1, ξ_2 тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда

$$f_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{\xi_1}(xx_2) f_{\xi_2}(x_2)dx_2 . \qquad (20')$$

Көбейтіндінің үлестірім тығыздығы. Жоғарыдағыға ұқсас әдіспен $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығы

$$f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x_1|} f_{\xi_1,\xi_2}\left(x_1, \frac{x}{x_1}\right)dx_1 , \qquad (21)$$

ал ξ_1, ξ_2 тәуелсіз кездейсоқ шамалар болған жағдайда

$$f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x_1|} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}\left(\frac{x}{x_1}\right)dx_1 \qquad (21')$$

формулаларымен анықталатынына оп-оңай көз жеткізуге болады.

Енді мысал ретінде тәуелсіз кездейсоқ шамалардың біреуі үзіліссіз, екіншісі дискретті кездейсоқ шамалар болатын жағдайды қарастыралық.

6-мысал. Тәуелсіз ξ және η кездейсоқ шамалары былай үлестірілген: ξ – тығыздығы $f(x)$ болатын үзіліссіз кездейсоқ шама, η – $x_1, x_2 \ldots$ мәндерін сәйкес $p_1, p_2 \ldots$ ықтималдықтарымен қабылдайтын дискретті кездейсоқ шама. **а)** $\xi \cdot \eta$; **ә)** ξ / η $(P\{\eta \neq 0\} = 1)$ кездейсоқ шамаларының үзіліссіз кездейсоқ шамалар болатынын және олардың үлестірім тығыздықтары

$$\textbf{а)}\ f_{\xi \cdot \eta}(x) = \sum_{k: x_k \neq 0} \frac{1}{|x_k|} \cdot f_\xi(x / x_k) p_k \ ; \qquad \textbf{ә)}\ f_{\xi / \eta}(x) = \sum_{k: x_k \neq 0} p_k \,|\, x_k \,|\, f_\xi(x x_k)$$

қатынастарымен анықталатынын көрсетелік.

Шешуі. Шындығында да **а)** жағдайында былай жаза аламыз:

$$F_{\xi\eta}(x) = P\{\xi\eta \leq x\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi\eta \leq x,\ \eta = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{x_k \xi \leq x, \eta = x_k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{x_k \xi \leq x\} P\{\eta = x_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k P\{x_k \xi \leq x\} = \sum_{k: x_k > 0} p_k P\left\{\xi \leq \frac{x}{x_k}\right\} +$$

$$+ \sum_{k: x_k = 0} p_k P\{0 \leq x\} + \sum_{k: x_k < 0} p_k P\left\{\xi_k \geq \frac{x}{x_k}\right\} = \sum_{k: x_k > 0} p_k F_\xi\left(\frac{x}{x_k}\right) +$$

$$+ \sum_{k: x_k < 0} p_k \left(1 - F_\xi\left(\frac{x}{x_k}\right)\right) + \left(\sum_{k: x_k = 0} p_k\right) I_{\{x \geq 0\}}.$$

Бұдан

$$f_{\xi\eta}(x) = \sum_{k: x_k > 0} \frac{1}{x_k} f_\xi\left(\frac{x}{x_k}\right) p_k - \sum_{k: x_k < 0} \frac{1}{x_k} f_\xi\left(\frac{x}{x_k}\right) p_k = \sum_{k: x_k \neq 0} \frac{1}{|x_k|} f_\xi\left(\frac{x}{x_k}\right) p_k .$$

$$\textbf{ә)}\ F_{\xi / \eta}(x) = P\left\{\frac{\xi}{\eta} \leq x\right\} = \sum_{k: x_k \neq 0} P\left\{\frac{\xi}{x_k} \leq x\right\} p_k =$$

$$= \sum_{k: x_k > 0} p_k F_\xi(x x_k) + \sum_{k: x_k < 0} p_k \left(1 - F_\xi(x x_k)\right).$$

Енді соңғы қатынастардан

$$f_{\xi / \eta}(x) = F'_{\xi / \eta}(x) = \sum_{k: x_k > 0} p_k x_k f_\xi(x x_k) - \sum_{k: x_k < 0} p_k x_k f_\xi(x x_k) = \sum_{k: x_k \neq 0} p_k \mid x_k \mid f_\xi(x x_k) .$$